



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

POLÍGONOS

**CICLO
PRE
2024-1**



POLÍGONO

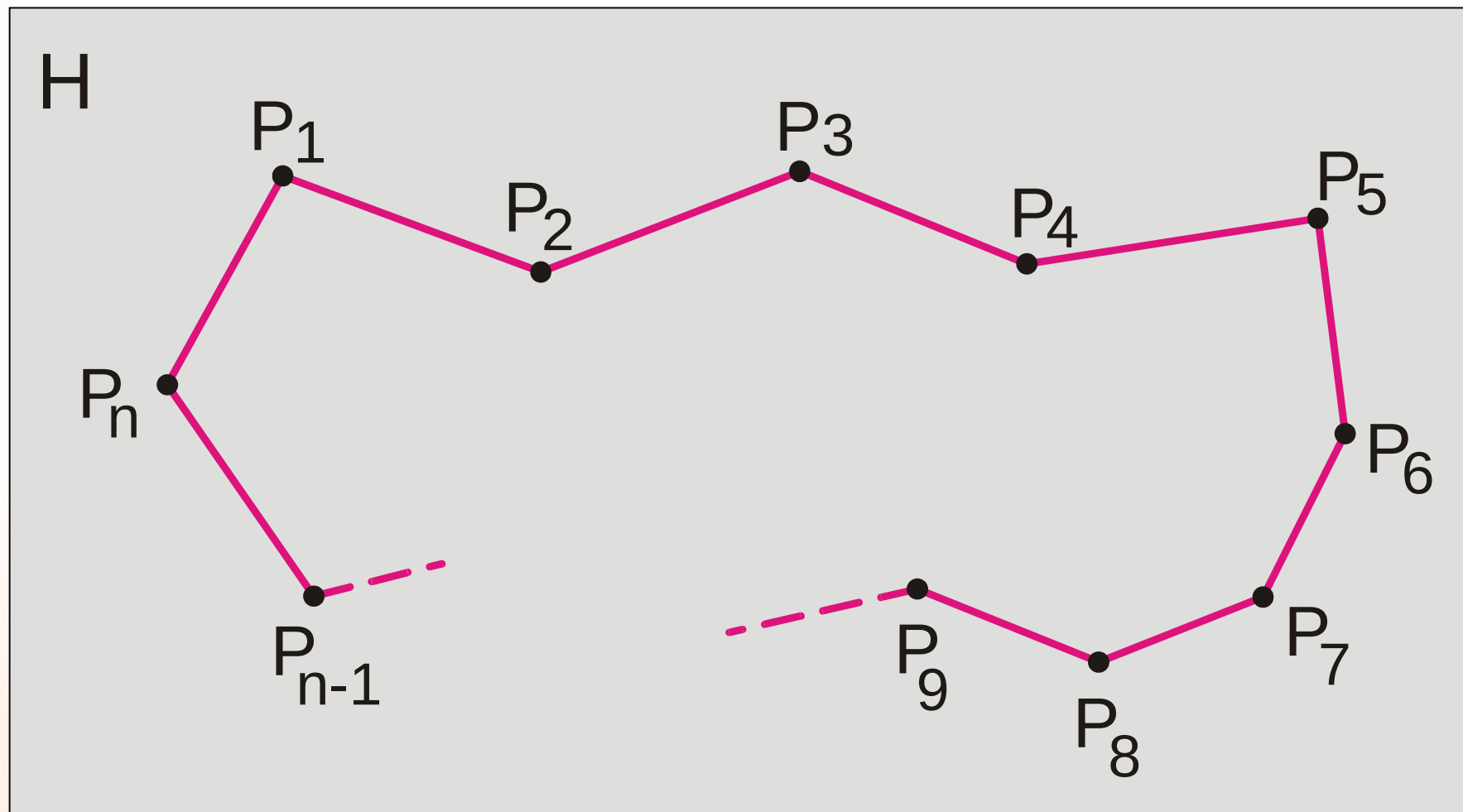
Definición.– Sean $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ y P_n puntos distintos de un plano H con $n \geq 3$, y los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ y $\overline{P_nP_1}$, tales que:

- a) Dos segmentos cualesquiera se intersecan sólo en sus extremos.
- b) Dos segmentos con un extremo común no son colineales.

Entonces la unión de los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ y $\overline{P_nP_1}$ se denomina polígono.

Notación:

Polígono $P_1P_2P_3 \dots P_{n-1}P_n$; $P_1P_2P_3 \dots P_{n-1}P_n$

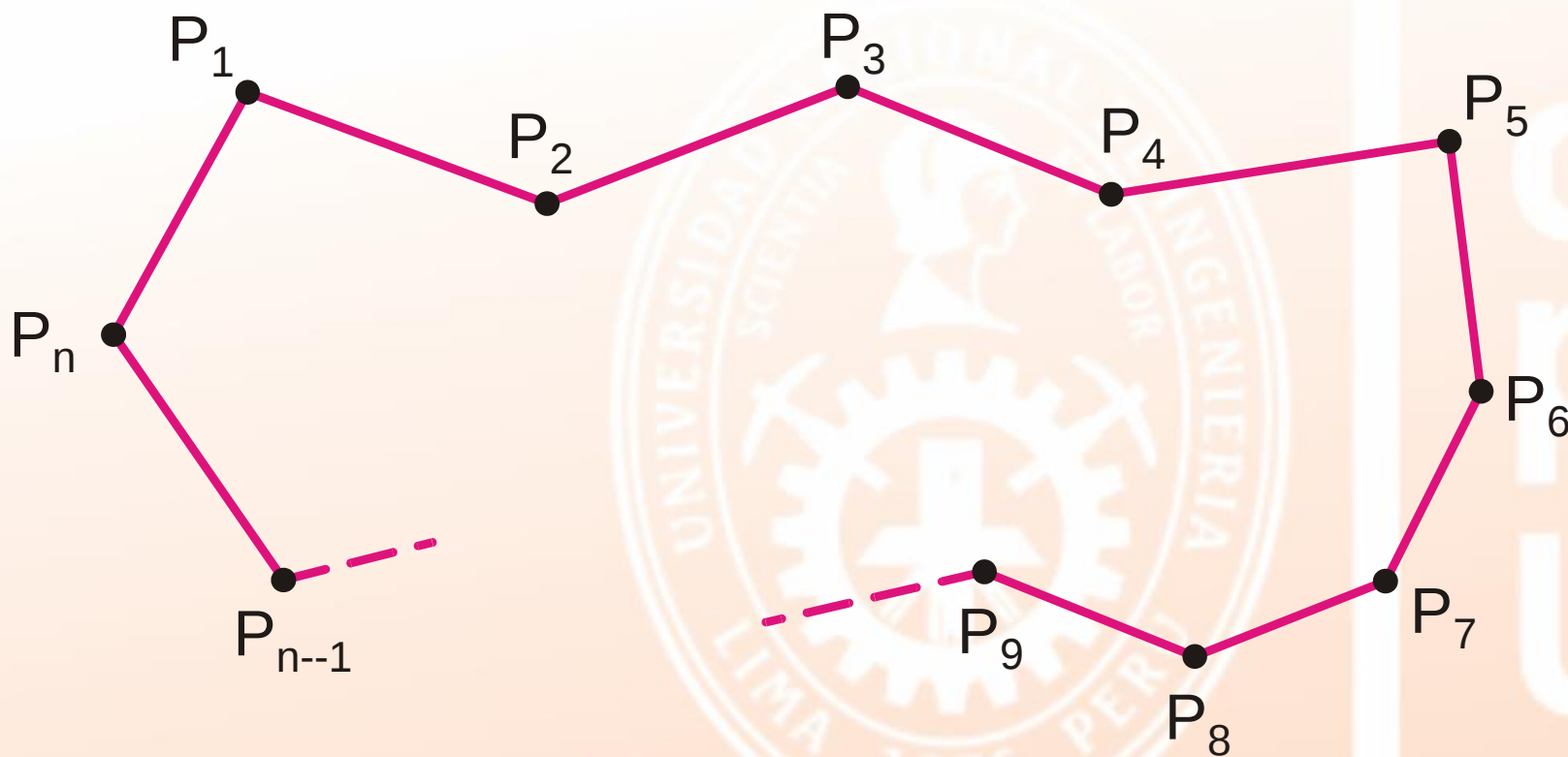


Vértices: $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ y P_n

Lados: $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ y $\overline{P_nP_1}$

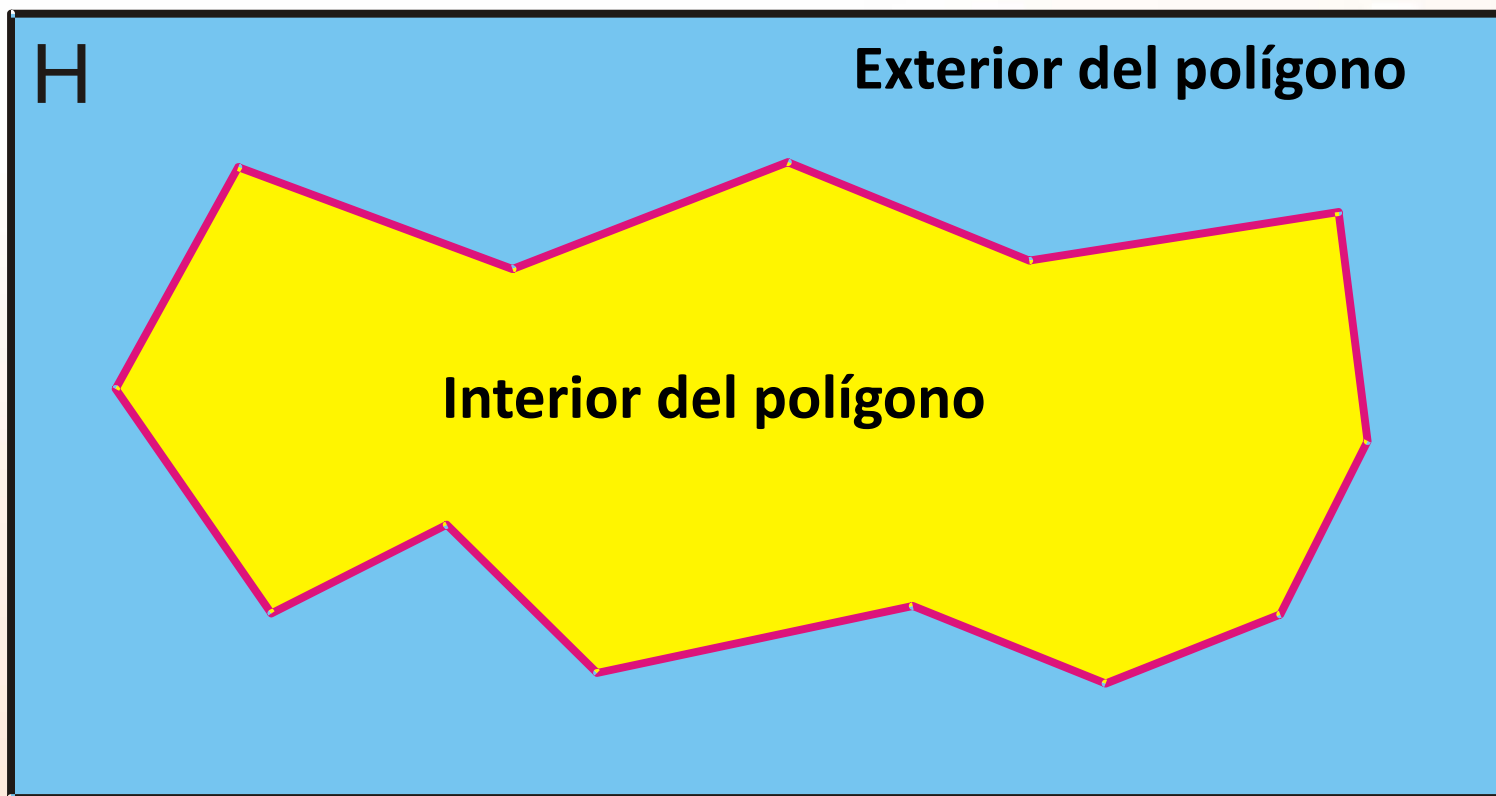
ÁNGULOS EN EL POLÍGONO

Dos lados con un vértice común del polígono determinan un ángulo al cual se denomina *ángulo* del polígono tales como: $P_n P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3$, $P_2 P_3 P_4$, ..., $P_{n-2} P_{n-1} P_n$ y $P_{n-1} P_n P_1$.



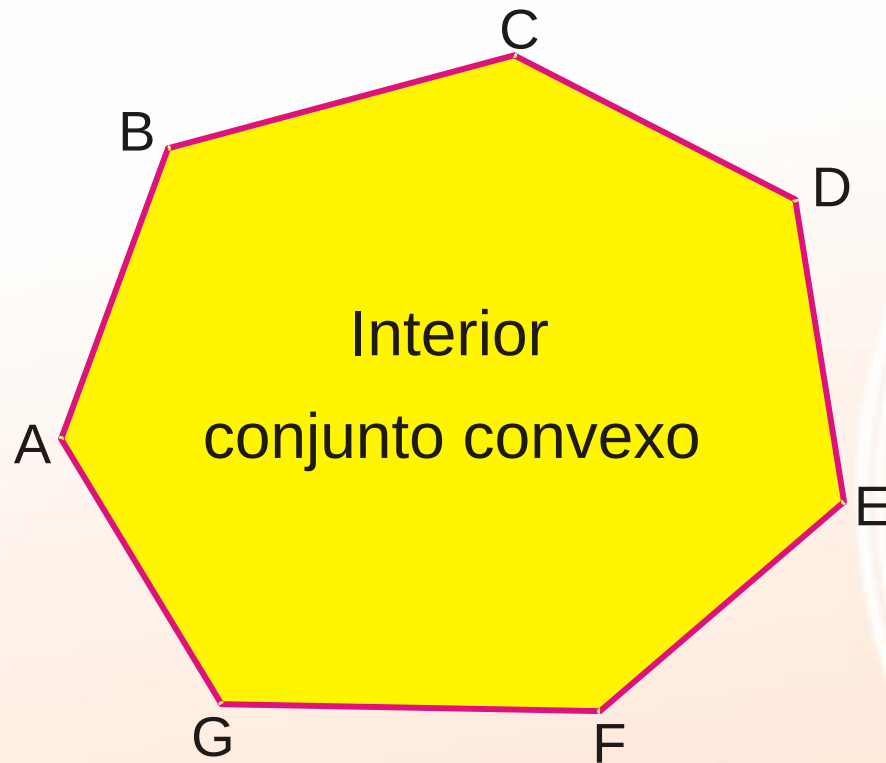
INTERIOR Y EXTERIOR DE UN POLÍGONO

Un polígono separa a un plano en conjuntos de puntos interiores al polígono denominado el *interior* del polígono, puntos del polígono y puntos exteriores al polígono denominado el *exterior* del polígono.

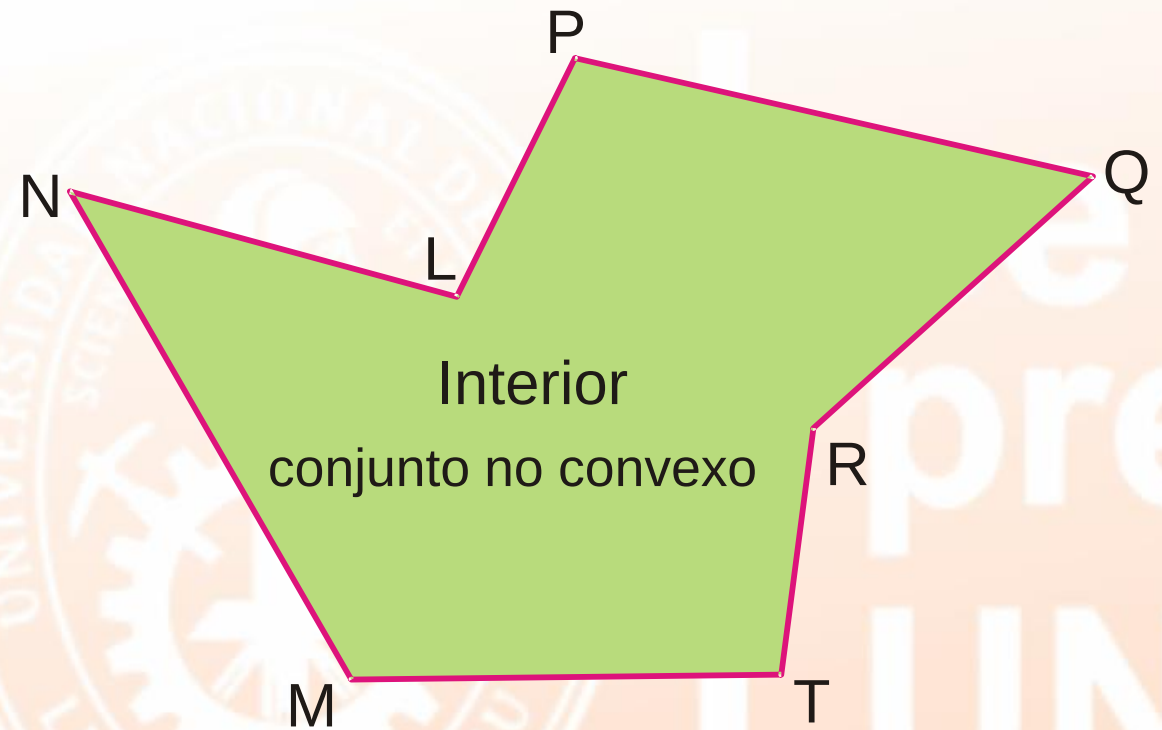


POLÍGONO CONVEXO Y NO CONVEXO

Un polígono se denomina *convexo* si el interior es un conjunto convexo, caso contrario se denomina polígono *no convexo*.



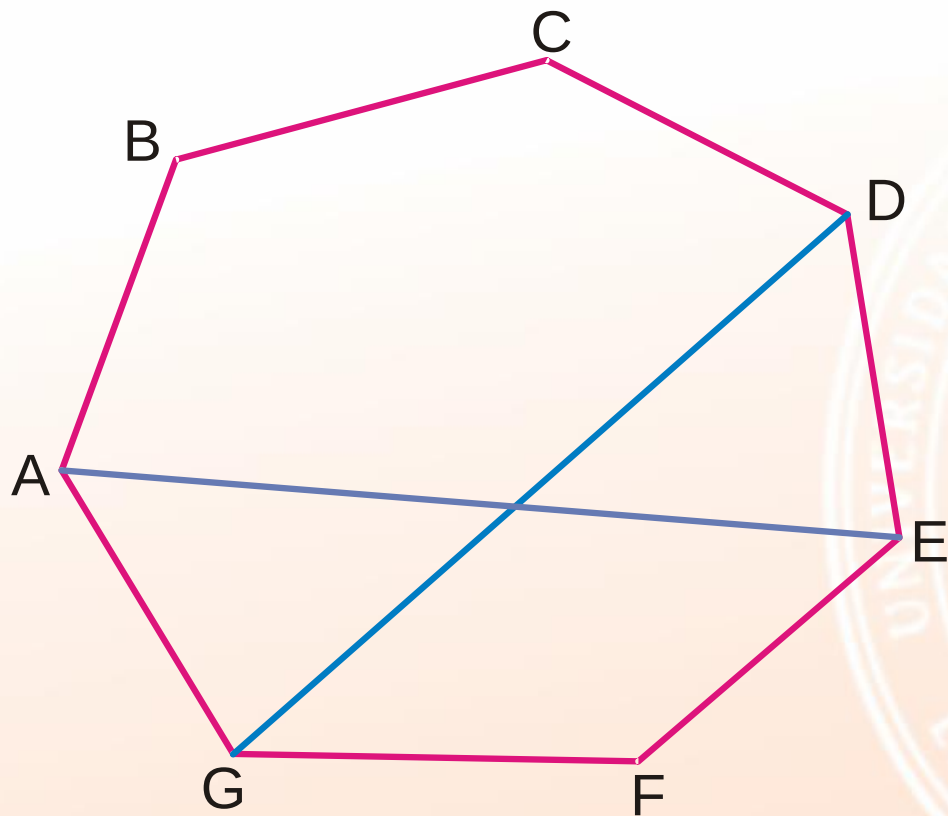
POLÍGONO CONVEXO



POLÍGONO NO CONVEXO

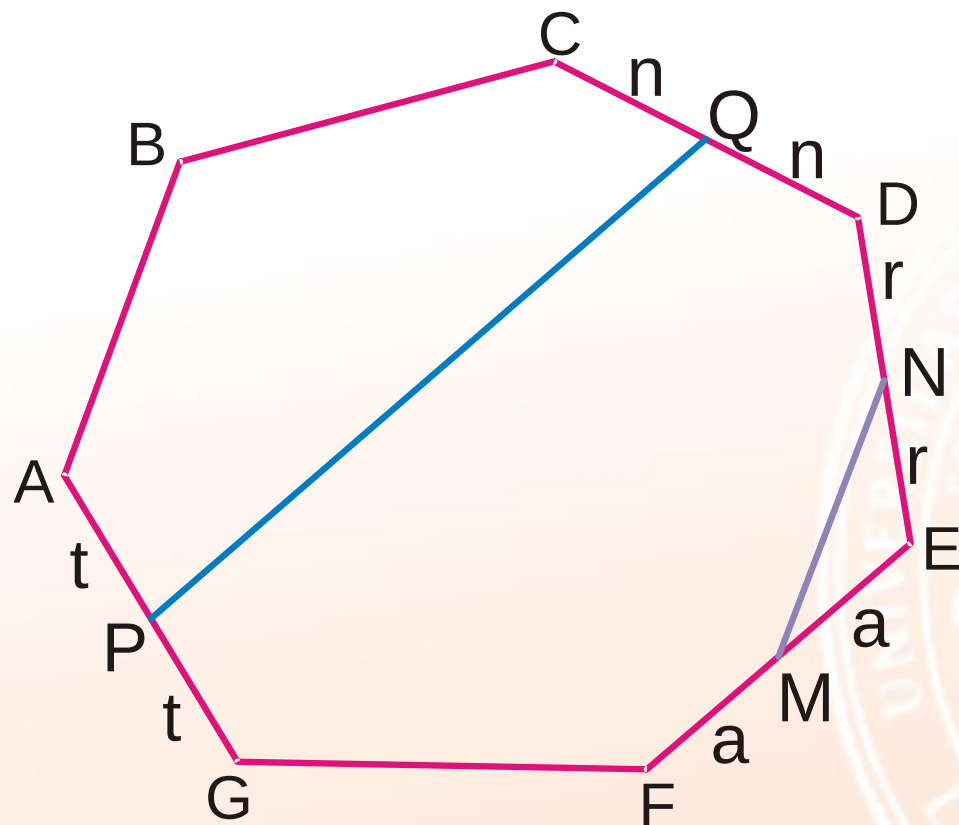
DEFINICIONES:

1.- Una *diagonal en un polígono* es un segmento que tiene por extremos dos vértices no consecutivos del polígono.



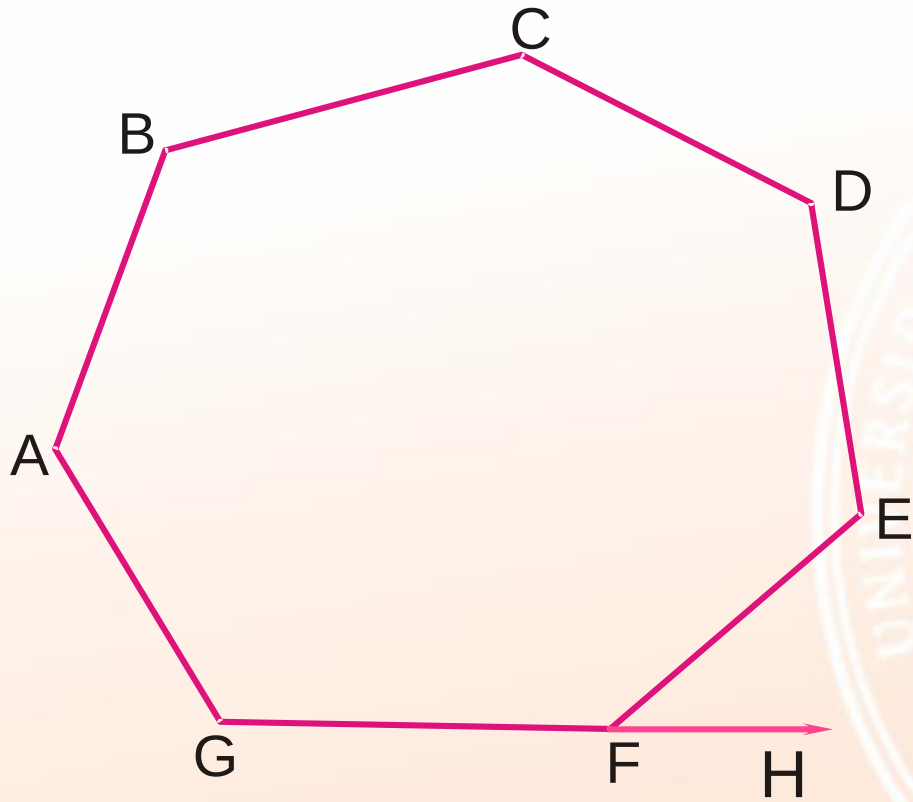
En el polígono ABCDEFG:
 $\overline{AE}$ y $\overline{DG}$ son diagonales

2.- Una **diagonal media** en el polígono es un segmento que tiene por extremos los puntos medios de dos lados cualesquiera del polígono.



En el polígono $ABCDEFG$,
 $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ son diagonales
medias

3.- Un *ángulo externo* en un polígono convexo es el ángulo adyacente y suplementario a un ángulo del polígono.



En el polígono ABCDEFG, el $\angle EFH$ es un ángulo externo.

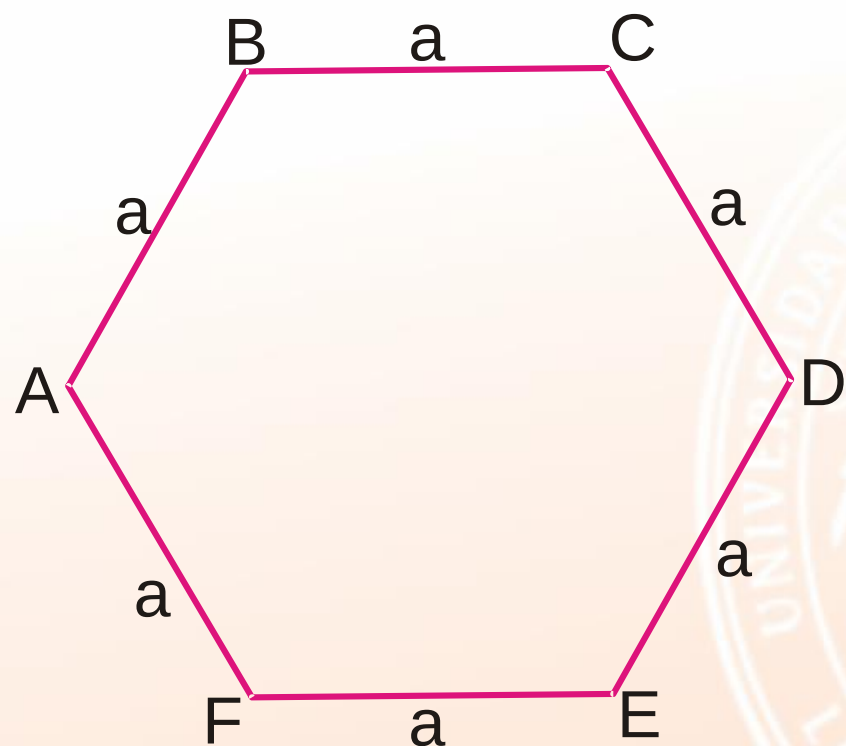
CLASIFICACIÓN SEGÚN EL NÚMERO DE LADOS

- Triángulo3 lados
- Cuadrilátero.....4 lados
- Pentágono.....5 lados
- Hexágono.....6 lados
- Heptágono7 lados
- Octágono u Octógono.....8 lados
- Nonágono o Eneágono..... 9 lados
- Decágono.....10 lados
- Endecágono o Undecágono.....11 lados
- Dodecágono 12 lados
- Pentadecágono.....15 lados
- Icoságono.....20 lados

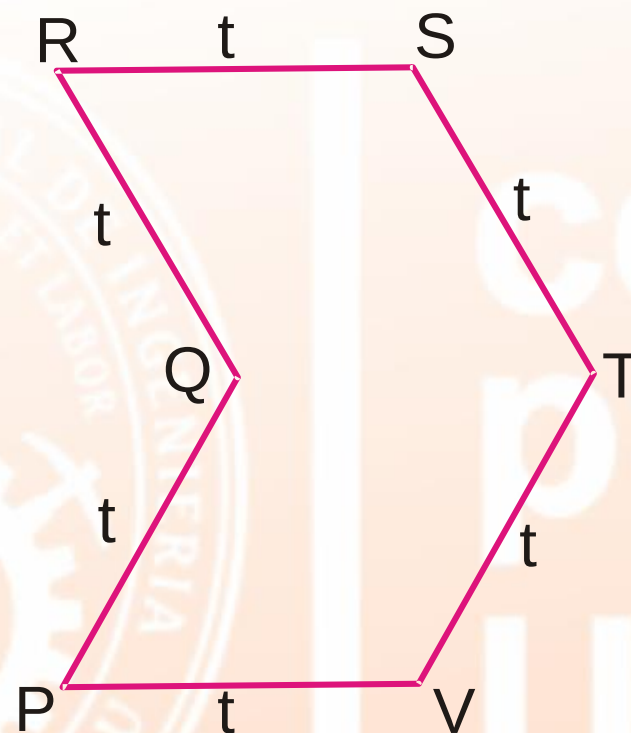
DEFINICIONES:

1.- POLÍGONO EQUILÁTERO

Es el polígono que tiene sus lados congruentes.



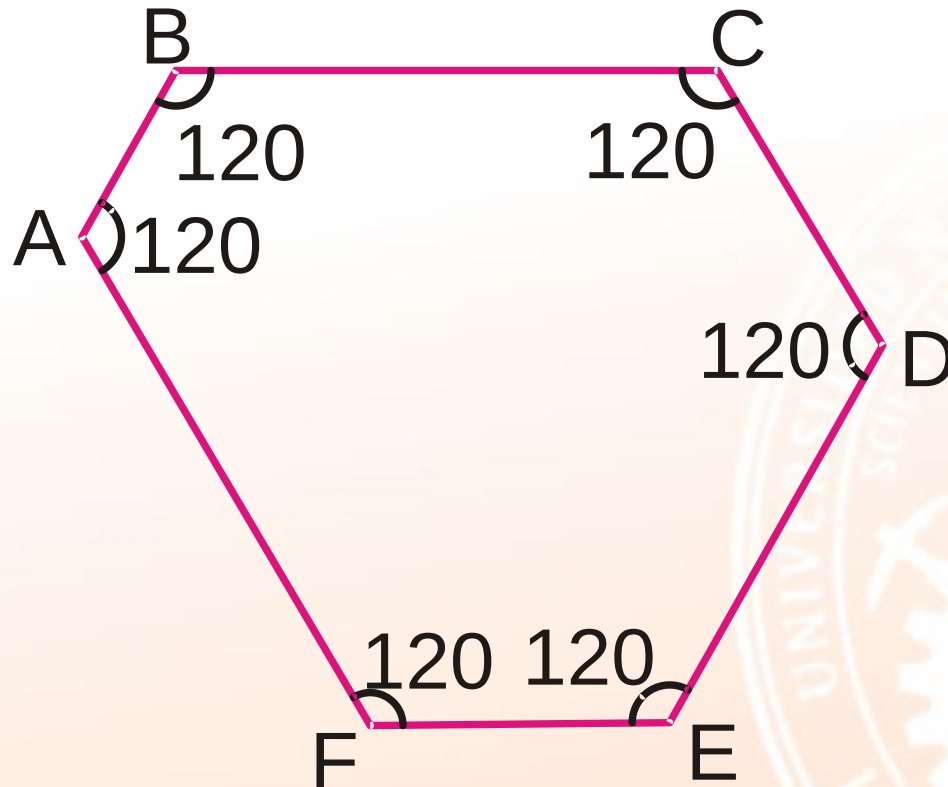
Polígono equilátero convexo



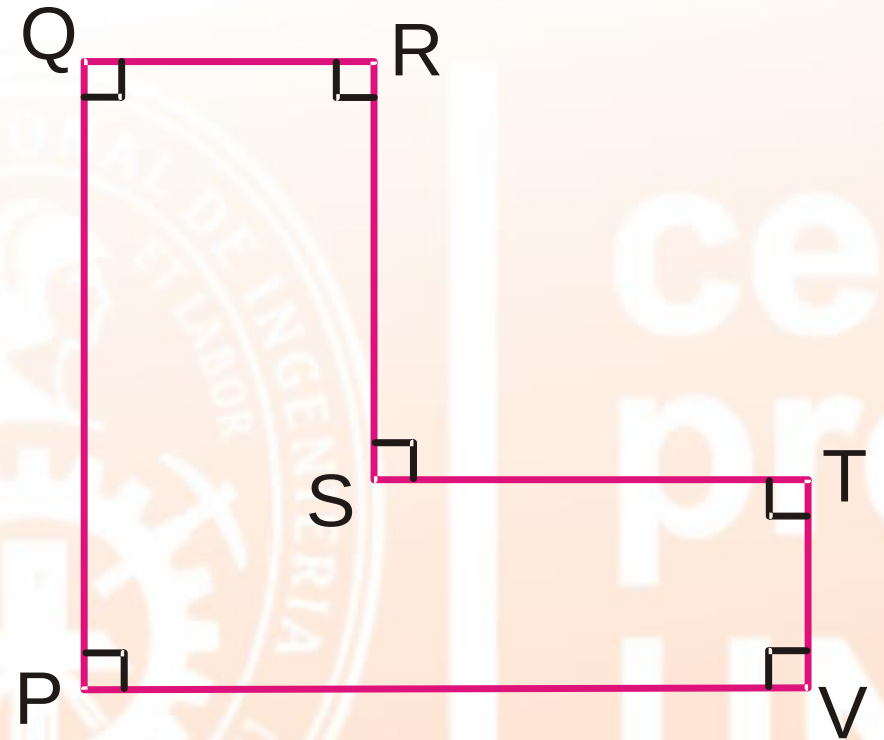
Polígono equilátero no convexo

2.- POLÍGONO EQUIÁNGULO

Es el polígono que tiene sus ángulos congruentes.



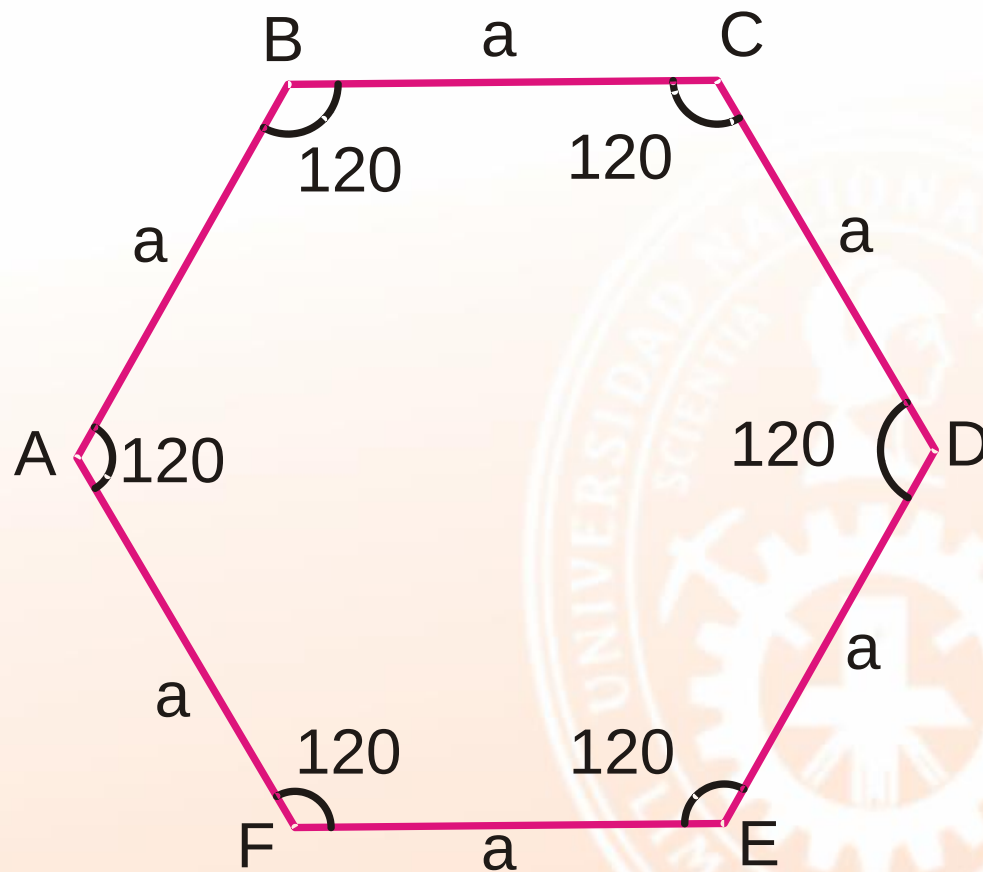
Polígono equiángulo convexo



Polígono equiángulo no convexo

3.- POLÍGONO REGULAR

Es el polígono convexo, equiángulo y equilátero.



EJERCICIO 01

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Los ángulos del pentágono equiángulo miden 108.
- II. El interior de un cuadrilátero, es un conjunto convexo.
- III. En un polígono no pueden existir dos lados colineales.

A) FFV

D) VFV

B) FVF

E) VFF

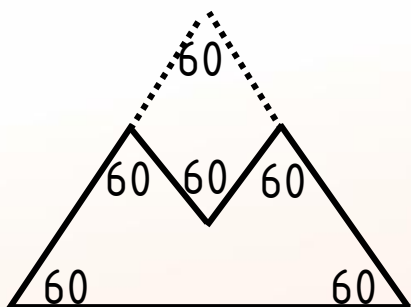
C) FFF

RESOLUCIÓN 01

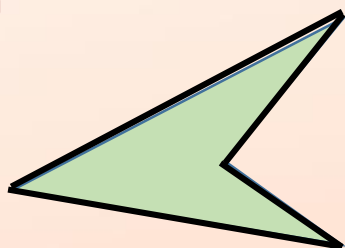
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Los ángulos del pentágono equiángulo miden 108.
- II. El interior de un cuadrilátero, es un conjunto convexo.
- III. En un polígono no pueden existir dos lados colineales.

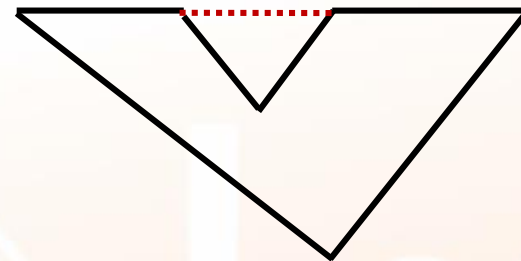
I. F El pentágono puede ser no convexo



II. F El interior del cuadrilátero puede ser conjunto no convexo



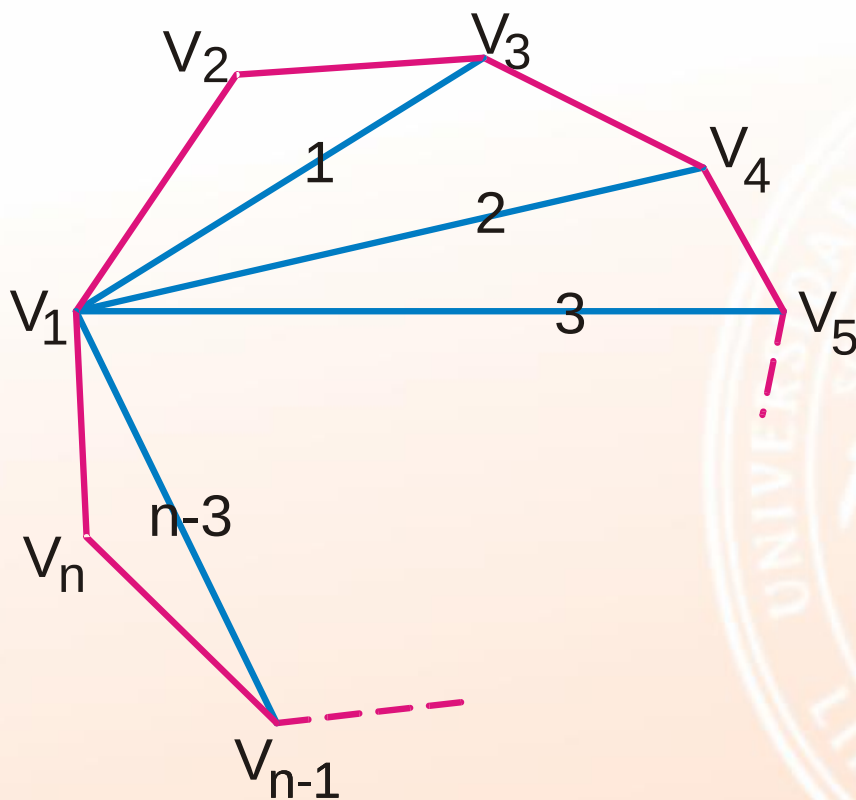
III. F



Clave: C

NÚMERO DE DIAGONALES TRAZADOS DESDE UN VÉRTICE

Teorema.- En el polígono convexo de n lados, el número de diagonales trazados desde un vértice es $(n-3)$.

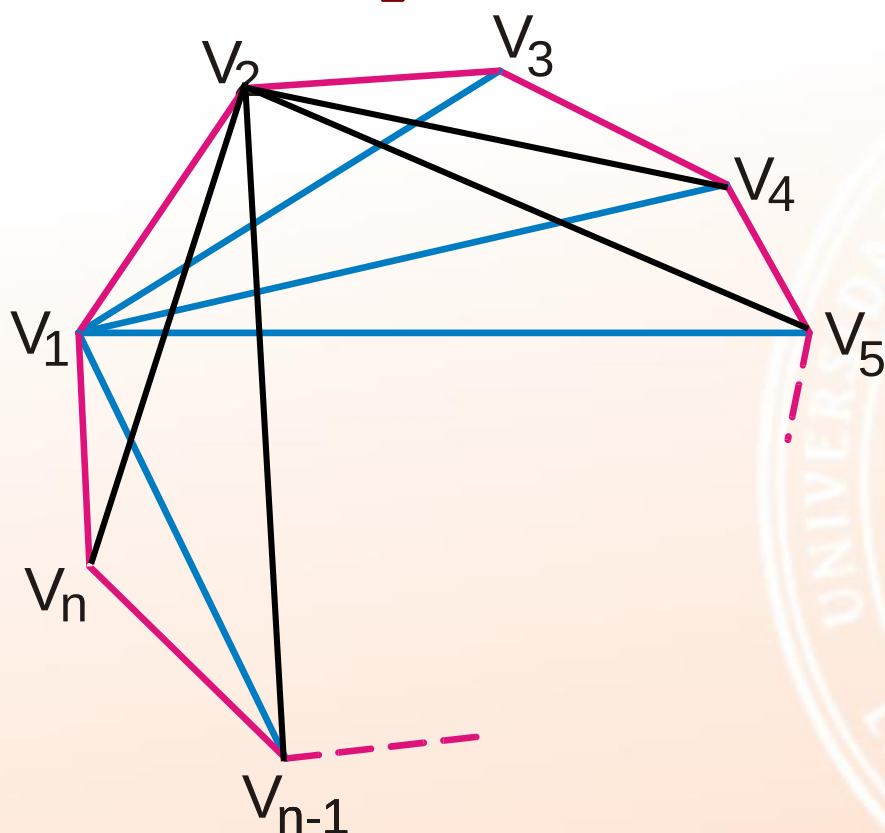


$$D_{\text{UN VÉRTICE}} = n - 3$$

NÚMERO DE DIAGONALES

Teorema.- En un polígono de n lados, el número de diagonales es

$$\frac{n(n-3)}{2}$$



V_1 vértice:.....($n-3$) diagonales.

V_2 vértice:.....($n-3$) diagonales.

Al trazar de los n vértices:
(n) ($n-3$)

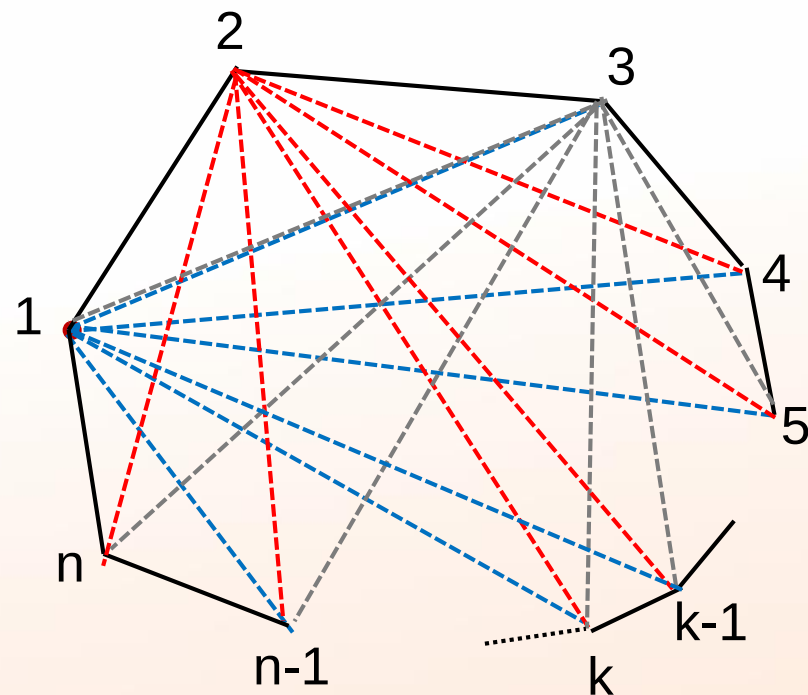
Todas las diagonales unen dos vértices por lo tanto se duplican

$$N_D = \frac{n(n-3)}{2}$$

NÚMERO DE DIAGONALES TRAZADOS DESDE k VÉRTICES CONSECUTIVOS

Teorema.- En un polígono de n lados, el número de diagonales trazados desde k vértices consecutivos ($k < n$) es:

$$n_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$



De cada vertice se traza $(n-3)$ diagonales.

1 vertice:..... $(n-3)$ diagonales.

2 vertice:..... $(n-3)$ diagonales.

3 vertice:..... $(n-3) - 1$ diagonales.

4 vertice:..... $(n-3) - 2$ diagonales.

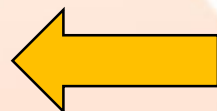
...

k vertice:..... $(n-3) - (k-2)$ diagonales.

Sumando: $k(n-3) - [1+2+3+4+.....+(k-2)]$

Pero: $1+2+3+4+.....+(k-2) = (k-2)(k-2+1) / 2$

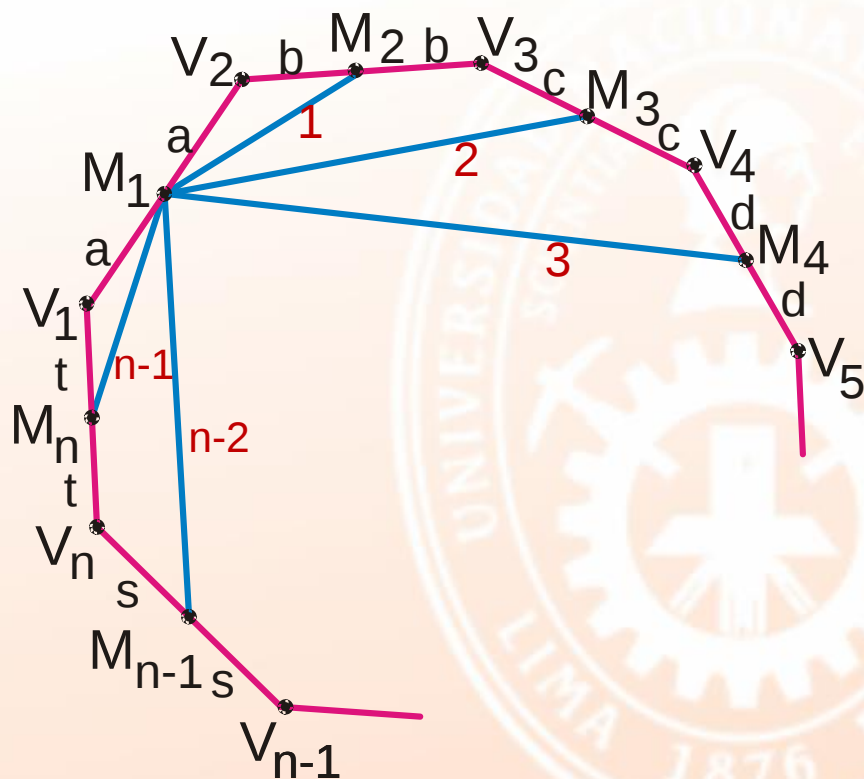
$$n_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$



$$N_{d.v} = k(n-3) - (k-2)(k-1) / 2$$

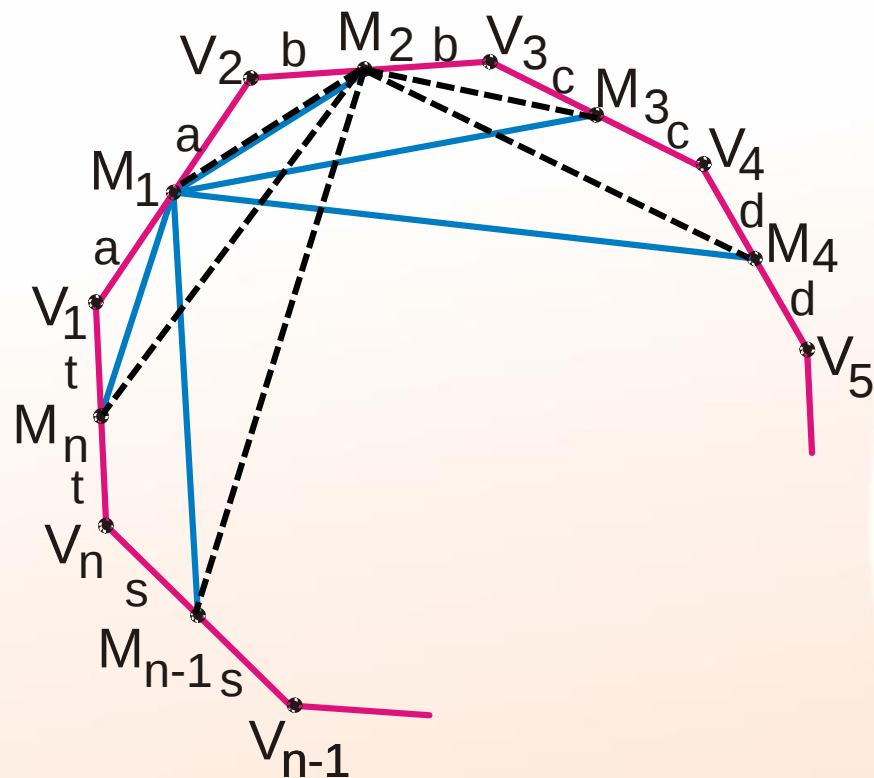
NÚMERO DE DIAGONALES MEDIAS TRAZADOS DESDE EL PUNTO MEDIO DE UN LADO DE UN LADO

Teorema.- En un polígono de n lados, el número de diagonales medias trazados desde el punto medio de un lado es $(n - 1)$.



NÚMERO DE DIAGONALES MEDIAS

Teorema.- En un polígono de n lados, el número de diagonales medias trazados desde el punto medio de un lado es:
$$\frac{n(n-1)}{2}$$



De cada punto medio se trazan $(n-1)$ diagonales medias.

de $M_1 \dots (n-1)$ diagonales medias
de $M_2 \dots (n-1)$ diagonales medias

Al trazar de los n puntos medios:
 $(n)(n-1)$

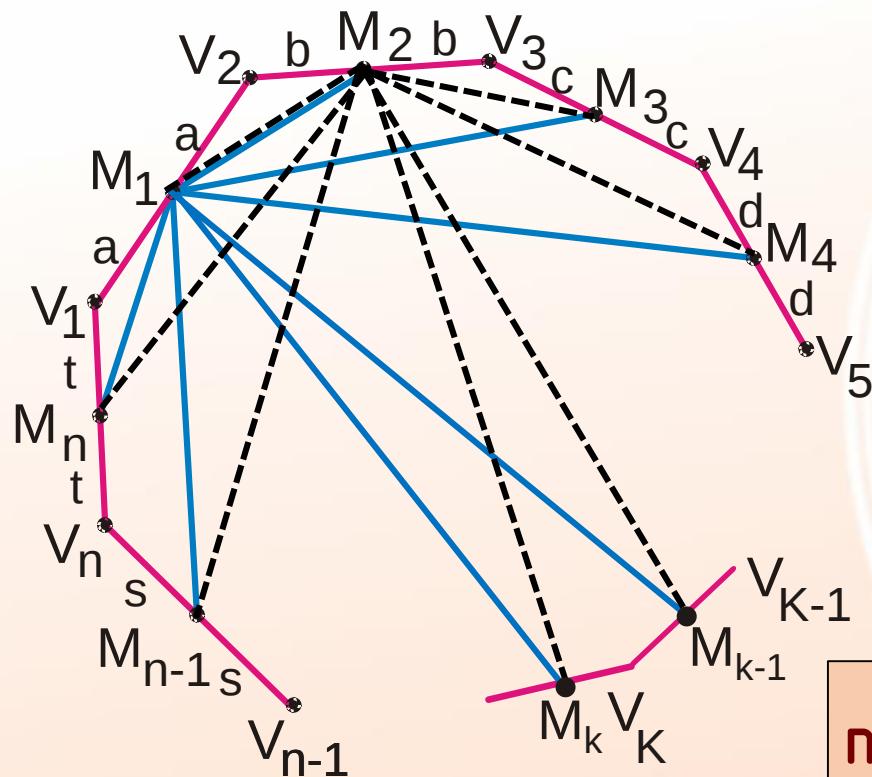
Todas las diagonales medias unen dos puntos medios por lo tanto se duplican

$$N_{DM} = \frac{n(n-1)}{2}$$

NÚMERO DE DIAGONALES MEDIAS TRAZADAS DESDE LOS PUNTOS MEDIOS DE K LADOS CONSECUTIVOS

Teorema.- En el polígono convexo de n lados, el número de diagonales medias trazadas desde los puntos medios de k lados consecutivos es:

$$nk - \frac{(k)(k+1)}{2}$$



$M_1: \dots (n-1)$ diagonales medias

$M_2: \dots (n-1) - 1$ diagonales medias

$M_3: \dots (n-1) - 2$ diagonales medias

$M_4: \dots (n-1) - 3$ diagonales medias

...

...

$M_k: \dots (n-1) - (k-1)$ diagonales medias

Sumando: $k(n-1) - [1+2+3+4+\dots+(k-1)]$

$$nk - \frac{(k)(k+1)}{2}$$



$$N_{d.v} = k(n-1) - (k-1)(k) / 2$$

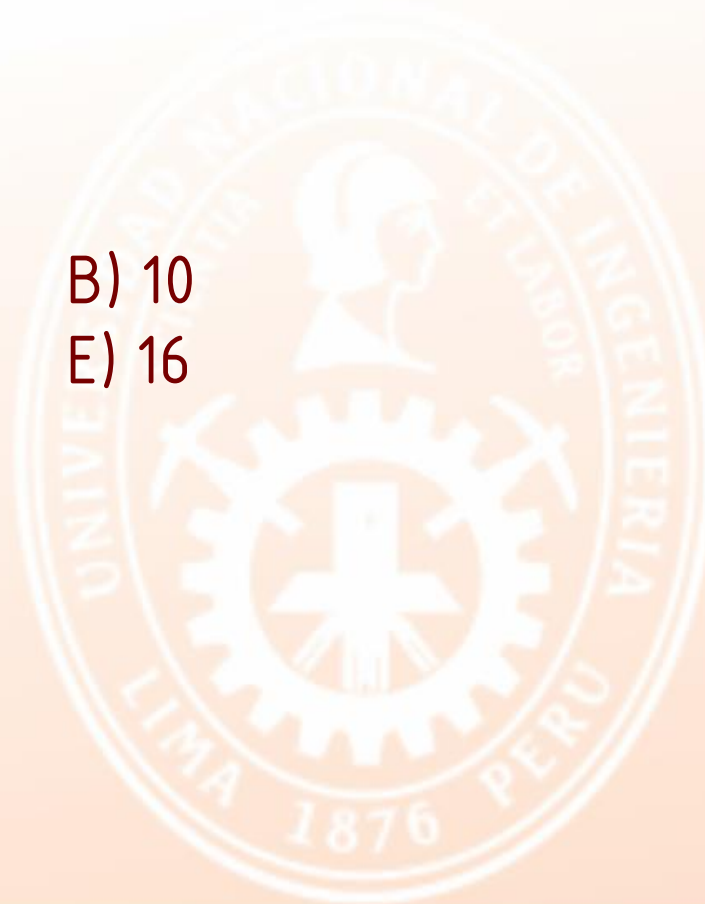
EJERCICIO 02

La diferencia del número de lados de dos polígonos es dos, la diferencia del número de diagonales es 15. Calcule el número de lados del polígono de mayor cantidad de lados.

- A) 8
- D) 14

- B) 10
- E) 16

- C) 12



RESOLUCIÓN 02

La diferencia del número de lados de dos polígonos es dos y la diferencia del número de diagonales es 15. Calcule el número de lados del polígono de mayor cantidad de lados.

	# lados	# Diagonales
	n	$D = \frac{n(n-3)}{2}$
Disminuye 2 lados	$n - 2$	$D = \frac{(n-2)(n-2-3)}{2}$
		Disminuye 15 diagonales

$$\frac{n(n-3)}{2} - 15 = \frac{(n-2)(n-5)}{2}$$

$$n(n-3) - 30 = (n-2)(n-5)$$

$$n^2 - 3n - 30 = n^2 - 7n + 10$$

$$4n = 40$$

$$n = 10$$

Clave: B

EJERCICIO 03

Desde 5 vértices consecutivos en un polígono regular se trazan 19 diagonales en total. Calcule el número de diagonales medias del polígono

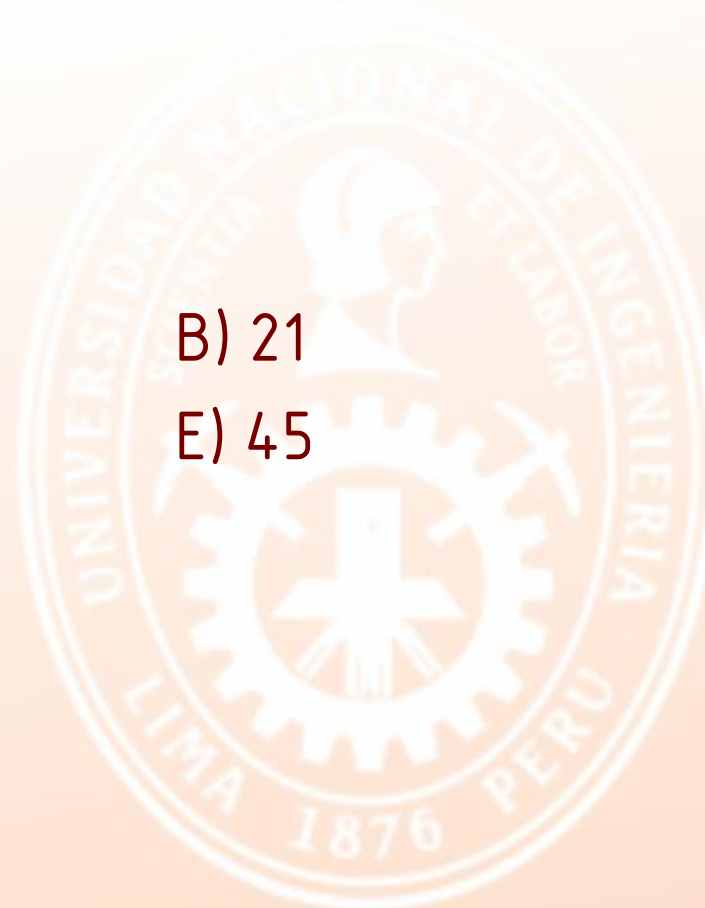
A) 15

D) 36

B) 21

E) 45

C) 28



RESOLUCIÓN 03

Desde 5 vértices consecutivos en un polígono se trazan 19 diagonales en total. Calcule el número de diagonales medias del polígono.

$$\begin{array}{l} V_1 \rightarrow n - 3 \\ V_2 \rightarrow n - 3 \\ V_3 \rightarrow n - 4 \\ V_4 \rightarrow n - 5 \\ V_5 \rightarrow n - 6 \\ \hline 5n - 21 \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow (+) \end{array}$$

Dato:

$$5n - 21 = 19$$

$$n = 8$$

Piden:

$$D_m = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$D_m = \frac{8(8-1)}{2}$$

$$D_m = 28$$

Clave: C

EJERCICIO 04

El número de triángulos determinados en un polígono convexo al trazar todas las diagonales desde un solo vértice y el número de diagonales que se pueden trazar desde el quinto vértice están en la relación de 13 es a 12. Calcule el número de diagonales medias de dicho polígono.

- A) 78
D) 120

- B) 91
E) 136

- C) 105

RESOLUCIÓN 04

Calcule: $\frac{n(n-1)}{2}$

El número de triángulos determinados en un polígono convexo al trazar todas las diagonales desde un solo vértice y el número de diagonales que se pueden trazar desde el quinto vértice están en la relación de 13 es a 12. Calcule el número de diagonales medias de dicho polígono.

T: Numero de triángulos determinados en un polígono convexo de n lados al trazar las diagonales.

D: Numero de diagonales trazadas del quinto vértice de un polígono de n lados.

por dato: $\frac{T}{D} = \frac{13}{12}$

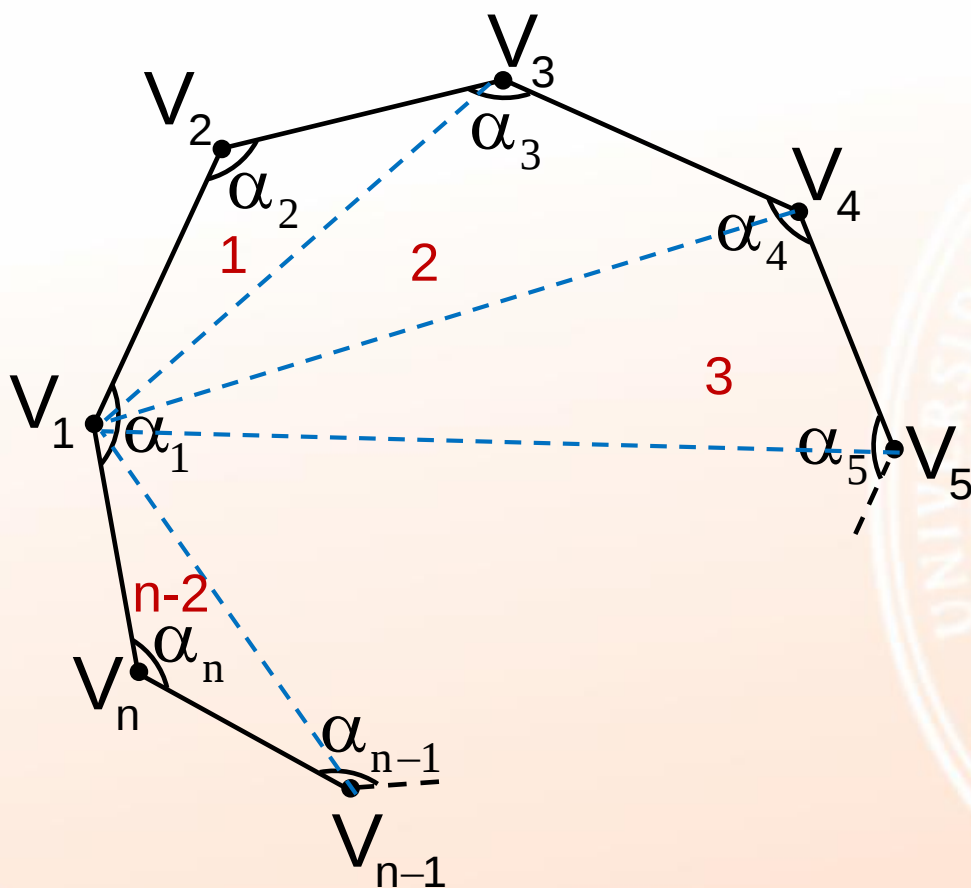
reemplazando $\frac{n-2}{n-3} = \frac{13}{12} \rightarrow n=15$

Luego: $D_m = \frac{15(15-1)}{2} \Rightarrow D_m = 105$

Clave: C

SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS INTERNOS

Teorema.- En un polígono convexo de n lados, la suma de las medidas de los ángulos internos es $180(n-2)$.

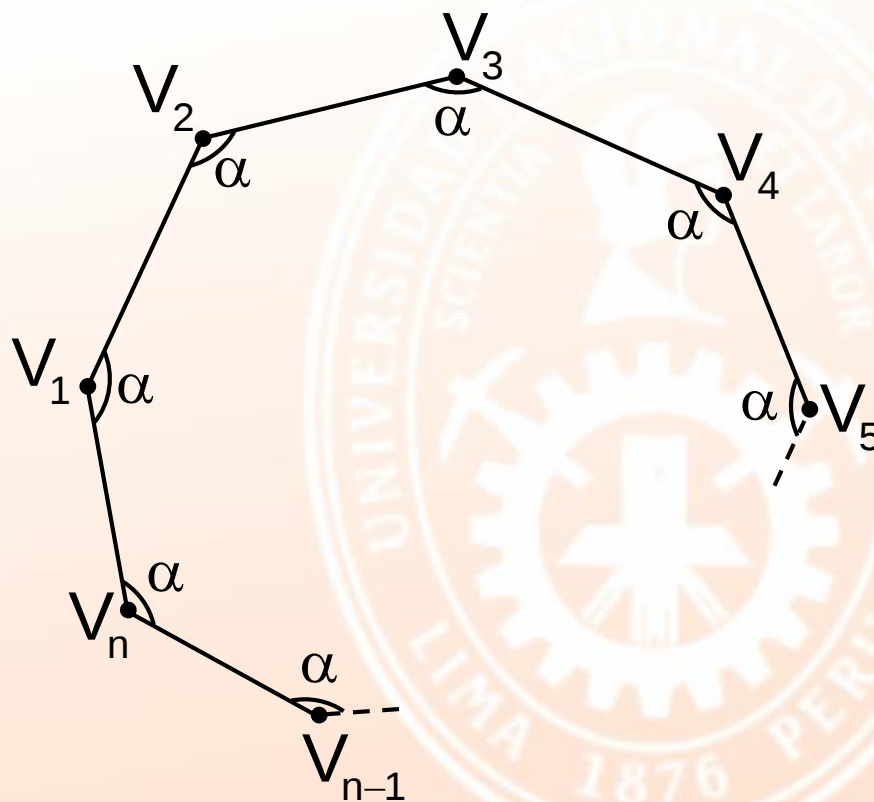


Se trazan las $(n - 3)$ diagonales del vértice V_1 , observándose la formación de $(n - 2)$ triángulos.

$$\text{Luego, } S_i = 180 (n - 2)$$

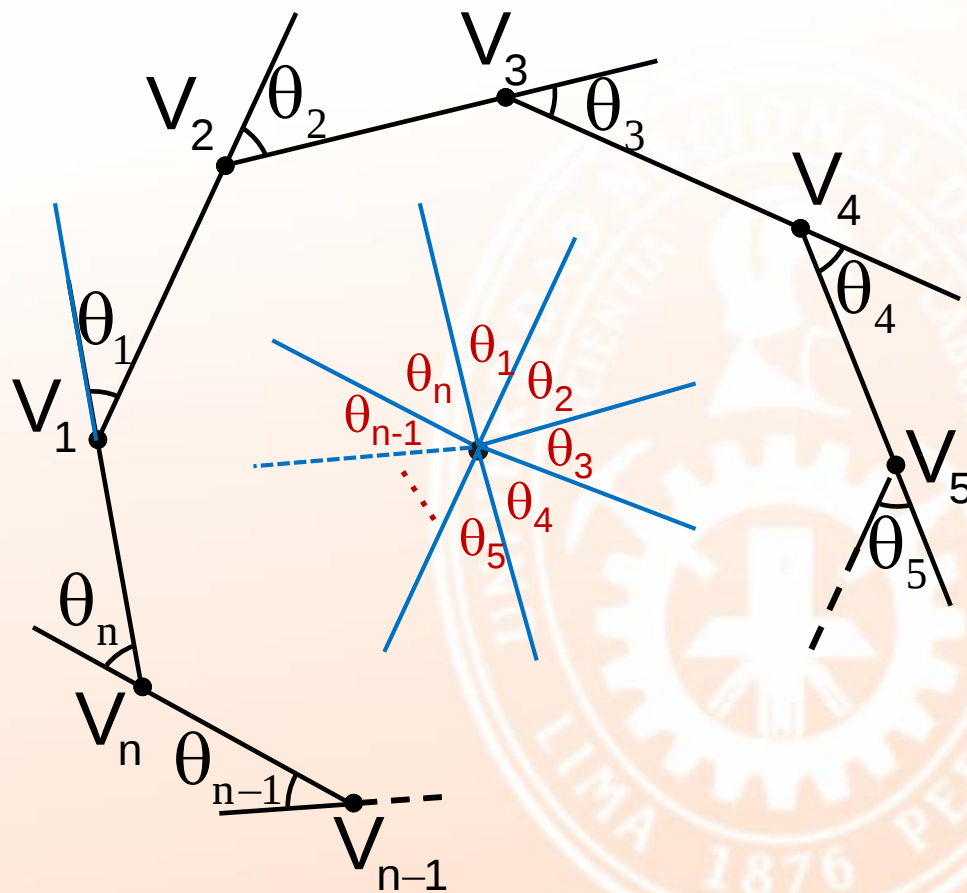
MEDIDA DE UN ÁNGULO INTERNO EN UN POLÍGONO CONVEXO Y EQUIÁNGULO

Corolario.- En un polígono convexo y equiángulo de n lados, la medida de un ángulo interno es

$$\frac{180 (n - 2)}{n}$$

ce
pre
UNI

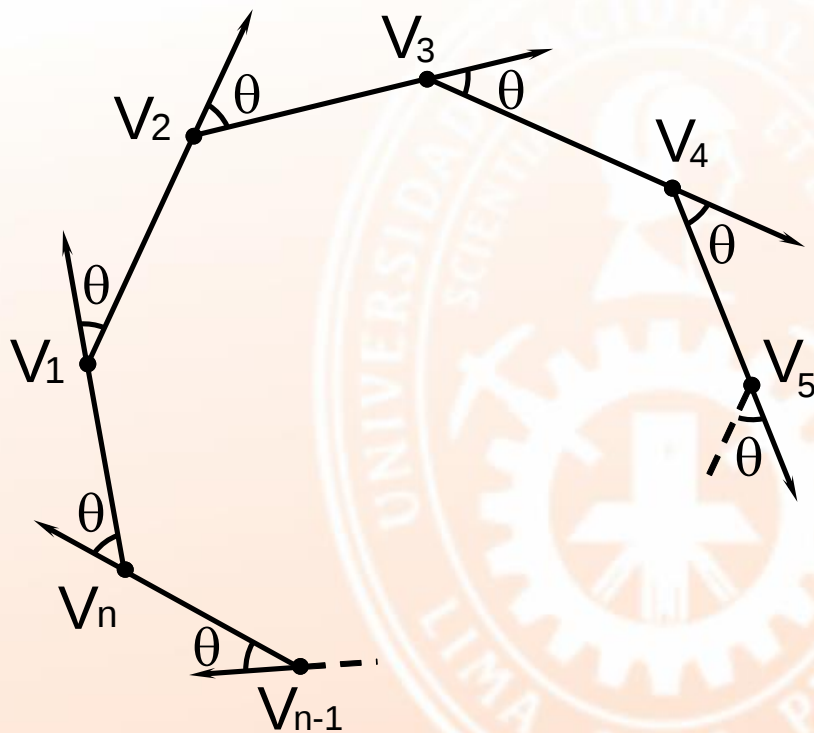
SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS EXTERNOS

Teorema.– En un polígono convexo de n lados, la suma de las medidas de los ángulos externos es 360.



MEDIDA DE UN ÁNGULO EXTERNO EN UN POLÍGONO CONVEXO Y EQUIÁNGULO

Corolario.- En un polígono convexo y equiángulo de n lados, la medida de un ángulo externo es $\frac{360}{n}$.



EJERCICIO 05

En un polígono convexo, la suma de medidas de cinco ángulos internos es 760. Calcule la suma de las medidas de los ángulos externos, correspondientes a los vértices restantes.

A) 190

D) 120

B) 220

E) 150

C) 105

RESOLUCIÓN 05

En un polígono convexo, la suma de medidas de cinco ángulos internos es 760. Calcule la suma de las medidas de los ángulos externos, correspondientes a los vértices restantes.

En un polígono convexo de n lados

sean $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-1}; \alpha_n$: medidas de los ángulos internos.

$e_1; e_2; \dots; e_{n-1}; e_n$: medidas de los ángulos externos.

Dato: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 760$

Piden: $E = e_6 + e_7 + \dots + e_{n-1} + e_n$

Se sabe que $e_1 + \dots + e_5 + e_6 + \dots + e_{n-1} + e_n = 360$

$$180 - \alpha_1 + \dots + 180 - \alpha_5 + e_6 + \dots + e_{n-1} + e_n = 360$$

$$180(5) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_5) + e_6 + \dots + e_{n-1} + e_n = 360$$

$$900 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_5) + E = 360$$

$$900 - 760 + E = 360$$

$$E = 220$$

Clave: B

EJERCICIO 06

ABCDEF y EFGHI, son dos polígonos regulares, los vértices A y G están en diferentes semiplanos determinados por la recta EF. Si $\overline{BQ}$ es perpendicular a la recta GE, entonces calcule la $m\angle EBQ$.

- A) 3
- D) 6

- B) 4
- E) 8

- C) 5

RESOLUCIÓN 06

ABCDEF y EFGHI, son dos polígonos regulares, los vértices A y G están en diferentes semiplanos determinados por la recta EF. Si $\overline{BQ}$ es perpendicular a la recta GE, entonces calcule la $m\angle EBQ$.

$$m\angle EBQ = x = ?$$

Ángulo exterior:

Hexágono: $360/6 = 60$

Pentágono: $360/5 = 72$

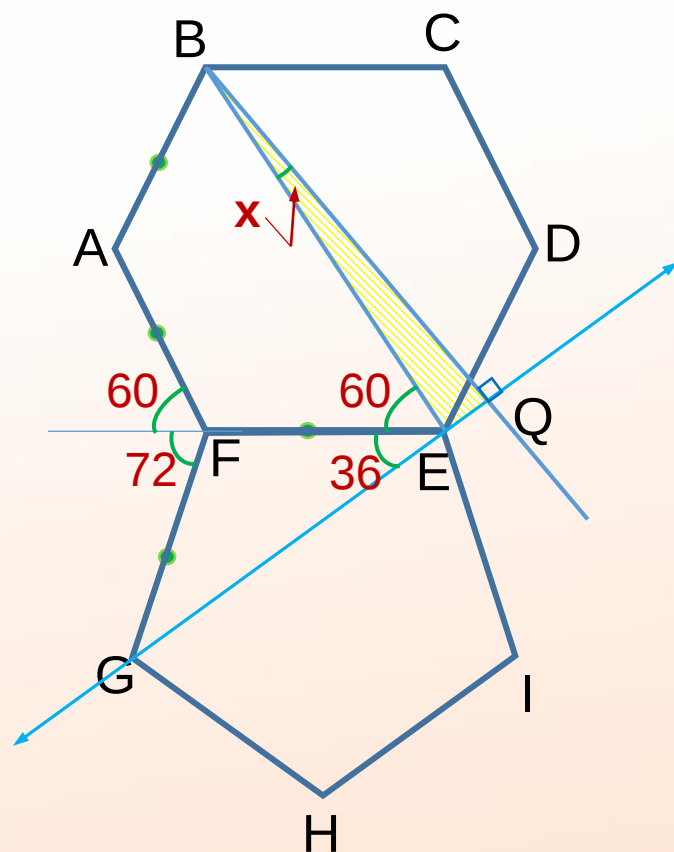
$\triangle EFG$, isósceles: $m\angle FEG = m\angle FGE = 36$

Trapezio isósceles BAFE: $m\angle FEB = 60$

$\triangle BEQ$, $\angle$ exterior en E:

$$m\angle BEG = 90 + x = 60 + 36$$

$$\Rightarrow x = 6$$



Clave: D

EJERCICIO 07

Las medidas de los ángulos interiores de un pentágono convexo están en progresión aritmética. Calcular el mayor valor entero de la razón.

A) 30

D) 36

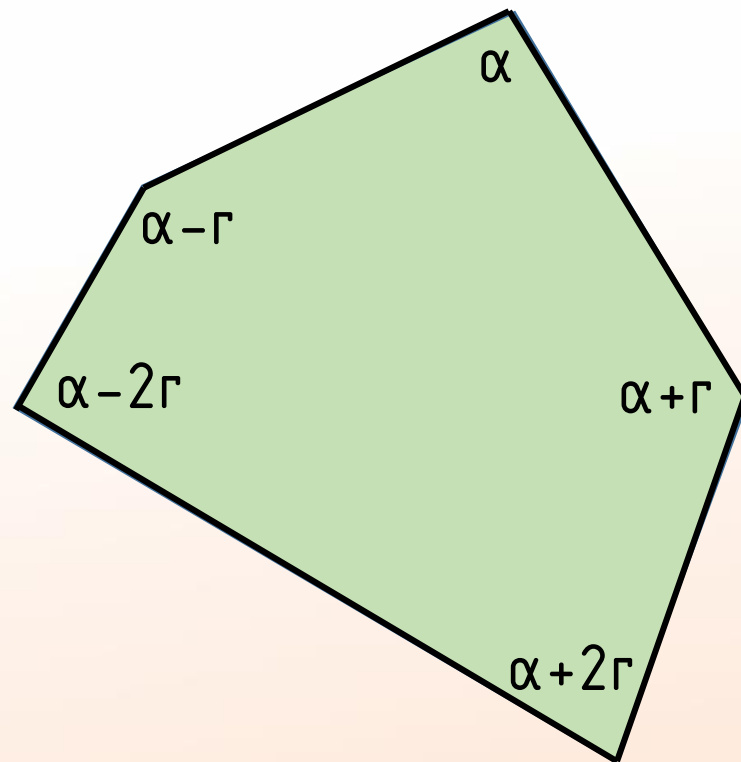
B) 32

E) 40

C) 35

RESOLUCIÓN 07

Las medidas de los ángulos interiores de un pentágono convexo están en progresión aritmética. Calcular el mayor valor entero de la razón.



Por teorema: $S_i = 180(5 - 2) = 5\alpha$

$$\alpha = 108$$

El menor ángulo: $108 - 2r > 0$

$$54 > r$$

El mayor ángulo: $108 + 2r < 180$

$$r < 36$$

se toma: $r < 36$

$$r_{\max} = 35$$

Clave: C

EJERCICIO 08

En un octágono equiángulo convexo $ABCDEFGH$, se tiene que $AB = EF$, $AH = 3\text{ u}$, $BC = 5\text{ u}$ y $DE = 2\text{ u}$. Calcule la longitud (en u) de $\overline{FG}$.

A) 6

D) 4

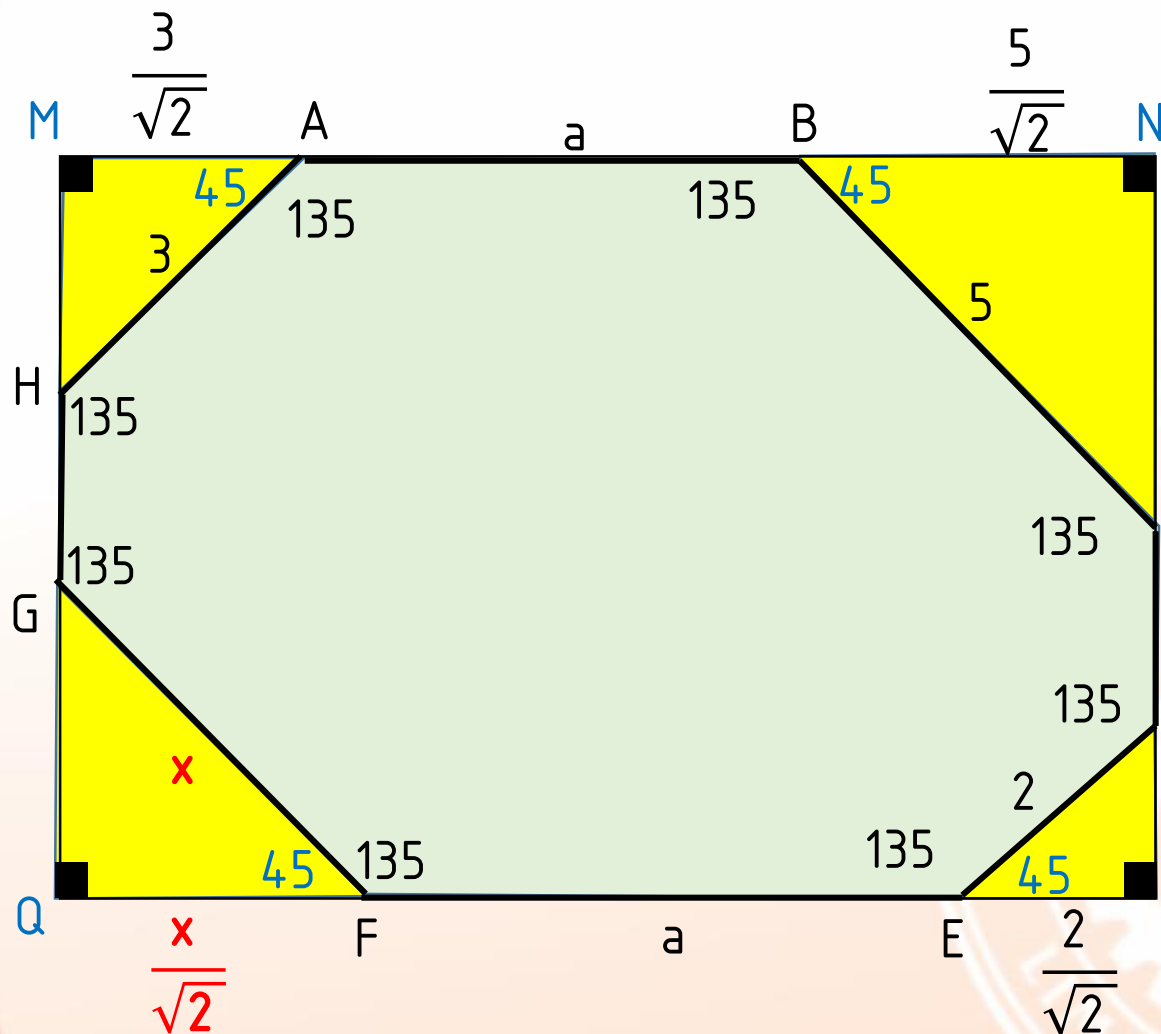
B) 2

E) 5

C) 3

RESOLUCIÓN 08

En un octágono equiángulo convexo ABCDEFGH, se tiene que $AB = EF$, $AH = 3$ u, $BC = 5$ u y $DE = 2$ u. Calcule la longitud (en u) de $\overline{FG}$.



Al prolongar los lados se forma el rectángulo MNPQ: $MN = QP$

Por $\angle$ de 45: $\triangle HMA \Rightarrow MA = 3/\sqrt{2}$

$\triangle BNC \Rightarrow BN = 5/\sqrt{2}$

$\triangle DPE \Rightarrow BN = 2/\sqrt{2}$

$\triangle GQF \Rightarrow FQ = x/\sqrt{2}$

Pero: $MN = QP$

$$3/\sqrt{2} + a + 5/\sqrt{2} = x/\sqrt{2} + a + 2/\sqrt{2}$$

$$6 = x$$

Clave: A

Por $\angle$ interior: $180(8 - 2) / 8 = 135$



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS



ce
pre
UNI